

文章编号: 1000-7598 (2011) 11-3479-08

复杂区域三维有限元四面体网格自动生成研究

吴火珍, 焦玉勇, 李海波, 张秀丽

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 基于经典三维 Delaunay 四面体网格的生成算法, 介绍了一种三维约束 Delaunay 三角化网格划分算法, 通过对约束的恢复和局部退化的消除, 保证了边界的一致性和网格的惟一性, 实现了三维约束区域的四面体网格自动生成; 通过对四面体的外接球半径与其最短边长度的比值 (记为 a) 和四面体体积与其外接球体积的比值 (记为 n) 的控制, 避免质量不佳的单元, 使生成的网格达到预期的质量要求, 并提出了一种 a 和 n 的计算方法, 简化了质量参数的计算过程; 对几何形状复杂, 特别是含有薄层的实体, 可通过在实体上增加约束来提高网格的质量和缩短计算时间, 使该方法能够实现岩土工程中不同地质条件下的复杂区域的三维有限元网格自动生成, 并且能够保证生成的网格质量较好, 为高精度的有限元计算提供了充分条件。计算实例表明, 该算法能够将复杂三维实体剖分成质量较好的 Delaunay 四面体网格, 可有效地应用于工程中有限元网格的生成。

关 键 词: 约束; 德洛奈三角剖分; 网格生成; 复杂区域

中图分类号: O 241

文献标识码: A

Study of 3D finite element tetrahedral mesh automatic generation for complex regions

WU Huo-zhen, JIAO Yu-yong, LI Hai-bo, ZHANG Xiu-li

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Based on the classical 3D Delaunay tetrahedral mesh generation method, a 3D constrained Delaunay triangulation algorithm is presented. By restoring the constrained boundary and removing the local degeneracies, the consistency of the solid boundary and the uniqueness of the mesh could be guaranteed. In this way, the constrained Delaunay triangulation method could be applied effectively to generate tetrahedral mesh for any complex 3D solids with the constraints. By controlling the ratio value of the circumradius of the tetrahedron to its shortest edge length (denoted as a), and the ratio of the volume of the tetrahedron to the volume of its circumscribing sphere (denoted as n), the low-quality elements are avoided; and also a method to calculate the a and n which simplifying the calculation process is proposed. For the entity with complicated geometry, especially the entity containing the thin layers, adding constraints could improve the mesh quality and shorten the calculation time. So, by using the method, the 3D finite element mesh for complex region under different geological conditions could be automatically generated in the civil engineering; and the high quality of the mesh which could be guaranteed provides sufficient condition for the high-precision finite element calculation. The verified examples show that the high-quality constrained tetrahedral mesh for any complex 3D solids could be generated by the constrained Delaunay triangulation method; and it could be applied effectively to the finite element mesh generation in engineering.

Key words: constraints; Delaunay triangulation; mesh generation; complex regions

1 引 言

现代工程分析计算如岩土及地下工程分析计算中, 最常用的数值方法是有限元法。有限元法需要进行大量复杂的前处理, 因此, 一个好的有限元

网格生成算法不仅能够大大节省计算时间, 且能够提高计算精度。网格生成技术经过过去的几十年, 特别是近 20 年的发展, 很多算法都发展得相当成熟。在众多的网格自动生成算法中, Delaunay 三角化方法由于生成的网格质量高、算法容易实现, 且

收稿日期: 2010-03-09

基金项目: 国家自然科学基金(No. 40672191); 岩土力学与工程国家重点实验室重点项目(No. SKLZ0801); 岩土力学与工程国家重点实验室前沿探索性项目(No. SKLQ001)。

第一作者简介: 吴火珍, 女, 1982 年生, 博士, 主要从事有限元数值模拟方面的研究工作。E-mail: whzhen100@163.com

适用于任何边界区域等优点, 得到了广泛的发展和应用^[1-3]。

目前, 二维 Delaunay 三角化算法已经发展得相当成熟, 但在三维区域中, 由于空间关系比较复杂, Delaunay 三角化仍然存在一些问题需要解决, 特别是存在约束限定的区域, 边界的一致性是一个尚需研究的问题。经典的 Delaunay 三角化方法只能适用于凸形区域, 对于存在约束限定的三维区域, 对约束边界的处理需要作一些补充, 处理三维约束区域的 Delaunay 三角化方法称为约束 Delaunay 三角化方法, 由三维约束区域生成的四面体称为约束 Delaunay 四面体^[4-6]。

基于上述三维约束 Delaunay 算法, 本文经过大量的计算机编程工作, 将 Si 教授的网格生成 DOS 程序^[7]作了改进移植, 实现了该程序的 Visual C++6.0 平台编译, 可在 Windows 环境下运行, 并通过控制四面体单元外接球半径与其最短边长度的比值和四面体体积与其外接球体积的比值保证生成的网格的质量。对几何形状复杂的实体, 可通过增加约束提高网格的质量和计算时间, 使程序能够实现岩土工程中不同地质条件下复杂区域的有限元网格自动生成。经算例验证, 表明该程序可以实现岩土工程中复杂约束三维区域的三角化剖分, 能够生成高质量的有限元四面体网格。

2 约束 Delaunay 三角化算法

Delaunay 三角化方法源于 Delaunay 1934 年提出的 Delaunay 准则^[8]。Delaunay 准则的含义为: 区域内的每一个三角形(四面体)的外接圆(球)不包含其他的节点, 该准则也称为空外接球准则。三维域中, 满足空外接球准则的四面体称为 Delaunay 四面体, 由 Delaunay 四面体组成的网格称为 Delaunay 四面体网格。约束三维区域生成的 Delaunay 四面体网格称为约束 Delaunay 四面体化网格。约束 Delaunay 四面体网格的生成算法是基于经典适用于凸形区域 Delaunay 三角化方法基础上的, 是经典 Delaunay 三角化算法的补充。经典的 Delaunay 三角化有逐点插入法、区域分解法等^[9-12]。

下面给出基于逐点插入法的适用于凸形区域的三维 Delaunay 三角化算法:

(1) 定义一个立方体, 包含待剖分区域的所有节点, 以立方体的 8 个顶点剖分成初始的 Delaunay 四面体网格;

(2) 向初始网格中插入节点;

(3) 找出外接球包含插入点的四面体 T, 删除

T 的公共面, 由 T 的顶点组成一个空腔。空腔的边界面为三角形, 并且每一个三角形均满足空外接球准则;

(4) 连接插入点与空腔的每一个三角形面的顶点, 生成新的四面体单元;

(5) 保存新的四面体单位信息;

(6) 重复步骤(2), 直到所有的顶点都插入网格中;

(7) 删除立方体的顶点以及所有与立方体相连的线段, 恢复区域的边界。

约束 Delaunay 三角化是在经典 Delaunay 三角化基础上发展起来的, 需要作一些补充, 算法的流程如下:

(1) 读取实体边界信息, 并保存约束信息;

(2) 利用上面经典 Delaunay 算法生成初始的 Delaunay 四面体网格, 这时不删除立方体边界;

(3) 恢复边界边;

(4) 消除局部退化;

(5) 恢复边界面;

(6) 删除立方体的顶点以及所有与立方体相连的线段, 恢复区域的边界, 这时得到的网格即为约束 Delaunay 四面体化网格。

3 相关概念及理论

任何一个实体的边界以及约束, 都是由点、线和面组成, 因此, 输入的实体的边界采用点、线和面 3 部分来表示, 记为 C 。实体边界各点的坐标可通过 AutoCAD 生成, 将点坐标导出后作为实体边界的输入数据。

(1) 定义 1

V 是 C 中的所有的顶点集合, Y 是由 V 组成的一种多边形(该多边形可以是四面体、三角形、线段和点), 如果 Y 存在一个外接球不包含其他的节点, 则 Y 是 Delaunay 化多边形; 否则, Y 是非 Delaunay 化多边形。

基于以上的 Delaunay 多边形的概念, 有以下两个命题^[13]: ①命题 1, 三维空间剖分域上的任意一条边 AB , 如果 AB 是 Delaunay 线段, 则线段 AB 必为域内 Delaunay 三角化中的一条边。②命题 2, 对于三维空间剖分域中的一个三角面片 $\Delta ABC'$, 如果 $\Delta ABC'$ 是 Delaunay 化三角形, 则面片 $\Delta ABC'$ 必为 Delaunay 三角化中四面体的一个面。

根据命题 1、2 得出, 如果一个三角形的每一条边都是 Delaunay 化线段, 则该三角形为 Delaunay 化三角形; 类似的, 如果一个四面体的每一个三角

形面片都是 Delaunay 化三角形, 则该四面即是 Delaunay 化的四面体。在四面体网格生成过程中, 空外接球准则是判断 Delaunay 四面体的判据, 但这两个命题在本算法中, 也用在特定情况下的对 Delaunay 四面体的判断。另外, 根据命题 1, 可在边界边中插入节点, 将边界边分裂成多个 Delaunay 化子线段, 使其存在于 Delaunay 四面体中。

(2) 定义 2

共面的 2 个四面体的所有节点包含在一个外接球内, 即相邻 2 个四面体的 5 个顶点在同一外接球上, 则由这两个四面体组成一个局部退化。

三维空间中, 由于组成局部退化的 2 个四面体满足 Delaunay 的空外接球准则, 因此, 局部退化问题在二维和三维中都存在, 而存在局部退化的网格具有不惟一性, 需对局部退化要做特殊的处理, 即打破局部退化, 使每一个四面体都是惟一的, 以保证网格用于有限元时计算结果的准确性。

4 边界边的恢复

Delaunay 算法无论应用在二维还是在三维问题上, 都存在约束丢失的情况。当约束边不存在于 Delaunay 剖分后的边的集合时, 该约束边即被丢失。一旦约束丢失了, 必须对其进行恢复, 这样才能保证模型边界的一致性和对模型刻画的准确性。

根据命题 1 可知, 只要在丢失的约束边上插入一定的节点, 将丢失的线段分裂成几段 Delaunay 子线段, 即可使约束边存在于几个 Delaunay 四面体中。由于三维空间问题比较复杂, 需要确定合理的插入点的位置^[7, 14-15]。

记以点 A 、 B 为端点的线段 AB , 如果点 A 或点 B 处至少存在 2 条相交线段的交角小于 90° , 则称 A 为锐角点。当一条线段的 2 端点都不是锐角点时, 则这条线段是 I 类型线段, 否则为 II 类型线段。在一条线段上插入节点, 可将一条线段分成多条子线段, 规定子线段的类型属性与原始的线段属性相同, 例如: 丢失线段 AB , 为 I 类型, 在 AB 中插入点 N' , 这时, 无论 N' 是否是锐角点, 线段 AN' 、 BN' 都为 I 类型线段。 v 是 II 类型线段 AB 上的一个插入点, 记 $O(v)$ 是线段 AB 的原来锐角点。

线段 AB 丢失时, 则一定是非 Delaunay 化线段, 即以 AB 为最大球面直径的球体包含其他的顶点, 定义被包含的节点称之为 AB 的包含点。边界恢复算法中, 插入点定义为 v 点, 用来确定 v 点位置的包含点定义为 P 点 (如图 1 所示)。这样的 P 点满足如下两个条件: ① P 是 AB 的包含点; ② P 点与 A 、

B 形成的三角形 $\triangle PAB$ 的最小外接球半径大于 AB 与其他包含点形成的三角形的最小外接球半径。由于 $\triangle PAB$ 的外接球半径也即是 $\triangle PAB$ 外接圆半径, 因此 P 点的确定可转化为二维问题。由于可以多点在同一球面上, 这时的 P 点可能不是惟一的。当 P 点不惟一时, 可选择任意一点作为 P 点。

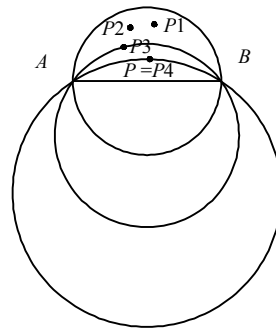


图 1 P 点的确定

Fig.1 Determining the point P

图 1 是关于丢失线段 AB 的 P 点确定的示意图。 $P1 \sim P4$ 都是 AB 的包含点, 由于 $P4$ 与 AB 所形成的最小外接球半径最大, 所以 $P4$ 为 P 点。

设 $S(c, r)$ 表示半径为 r 、圆心为 c 点的球, 该球体与 P 点相关, v 是插入点。根据线段的类型, v 点按以下 3 种方法插入:

(1) AB 是 I 类型线段, 则 v 点为 AB 与 $S(c, r)$ 的交点, $S(c, r)$ 的确定如下: 如果 $AP \leq \frac{1}{2} AB$ 时, 则圆心 c 为 A 点, 半径 r 为 AP 长度, 如图 2(a) 所示, 这时, 子线段 Av 上不需再插入节点, 只需对 vB 线段进行分裂; 否则圆心 c 为 B 点, 半径为 BP 长度, 类似的, 此时子线段 Bv 不需要再插入节点, 只需对 vA 线段进行分裂。

(2) AB 是 II 类型线段, 设线段分裂从 A 点往 B 点进行, 设 $k = O(v)$, 则 v 为 kB 与圆 $S(c, r)$ 的交点。 $S(c, r)$ 的确定如下: 圆心 c 为 k 点, 半径 r 为 kP 的长度。 v 点插入后, 比较 vB 与 vP 的长度。设线段的分裂是从 A 点往 B 点段进行的, 也就是子线段 Av 应是 Delaunay 线段。所以, 当 vB 的长度小于 vP 的长度时, 插入的点是无效的, 此时放弃 v 点, 用下面的方法 (3) 来分裂 AB , 如图 2(b) 所示。

(3) AB 是 II 类型线段, $k = O(v)$, 记在方法 (2) 中放弃的 v 点为 v' , 则 v 为 kB 与 $S(c, r)$ 的交点。 $S(c, r)$ 确定如下: 圆心 c 为 k 点, 如果 $pv' < \frac{1}{2} Av'$, 则半径 r 为 $kA + Av' - pv'$ 长度; 否则, 半径 r 为 $kA +$

$\frac{1}{2}Av'$ 长度, 如图 2(c)所示。

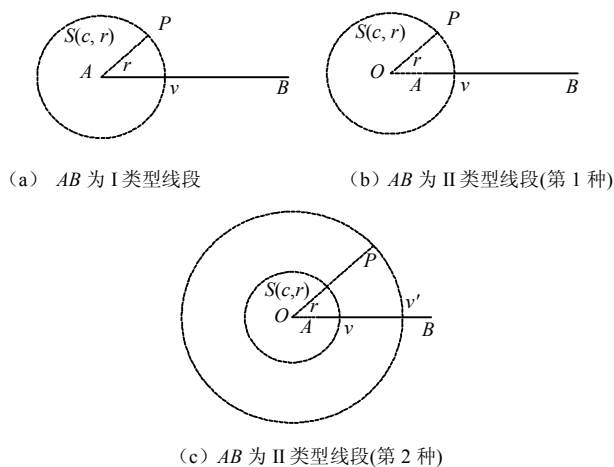


图 2 插入点位置的确定

Fig.2 Determining of inserted point position

对于任何一条遗失的线段, 反复应用以上 3 种方法对丢失的线段进行分裂, 直到所有分裂的线段均是 Delaunay 线段。

插入分裂节点后, 删除所有与丢失线段相交的四面体形成一个凸多边形, 与插入节点一起重新生成 Delaunay 四面体网格。丢失的线段即存在于新生成的 Delaunay 四面体边的集合中, 丢失的约束边被恢复。

5 局部退化的消除

由于组成局部退化的四面体也满足 Delaunay 准则, 因此, 在三维 Delaunay 四面体网格中, 存在局部退化现象是普遍的。组成局部退化的 2 个四面体, 任意连接 5 个顶点生成的四面体都是 Delaunay 四面体, 因此, 由局部退化的 5 个顶点生成 2 个 Delaunay 四面体不是惟一的。为保证四面体网格的惟一性, 须消除网格中的局部退化。由于局部退化的 5 个顶点在同一球面上, 可以通过改变一个顶点的位置来打破这种共面的性质, 但改变任意一个顶点, 会影响其他四面体的性质, 因此, 这种通过改变局部退化顶点位置来消除局部退化只在特定的情况下才能采用。当不能使用该方法时, 可通过称为“插入节点法”来消除局部退化^[7, 16-17], 插入节点法是通过插入新的节点重新生成 Delaunay 四面体来消除局部退化。

如果实体中的一个顶点发生随机扰动而不影响原实体的一致性, 称该点可扰动, 否则该点是不可扰动的。例如, 边界线段或者面片的一点沿着直

线方向或者面片内部移动时, 不改变该直线共线性或者面片的共面性, 则该点是可扰动的; 而 2 条或者多条线段的交点以及 3 个或者多个面的交点, 向任何方向发生扰动都将影响整体的一致性, 是不可扰动的。

设 N 是构成局部退化的四面体的顶点, 则 N 包含的顶点在同一外球球上。如果点 p 是 N 中的任何一个顶点且可扰动, 则局部退化可通过扰动 p 点来消除。但是, p 点发生扰动后不能引起网格中线段的非 Delaunay 性, 如果 p 点发生任何扰动都会引起其他线段变成非 Delaunay 线段, 如图 3 所示, 则扰动法不可行。

可以看出, 通过扰动 p 点能够消除局部退化时, 这样的 p 点需满足两点: 首先, p 点是可扰动的; 其次, p 点发生至少一个轻微的扰动不会引起网格中的线段为非 Delaunay 线段。

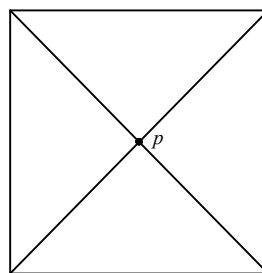


图 3 扰动 p 点引起线段的非 Delaunay 性

Fig.3 Non-Delaunay feature of segment caused by disturbance point p

图 3 所示是二维域中 p 点向任何一个方向移动时, 都会引起至少一条线段的非 Delaunay 性质, 这时扰动法不满足要求, 需采用下面称为插入节点的方法。

插入节点法是通过向局部退化的区域插入一个新的点 v_b , 以 v_b 作为新生成的四面体的顶点来重新生成四面体网格。插入点位置的确定按如下规则:

(1) 当局部退化中不存在 4 点共面时, v_b 为局部退化的外接球球心。

(2) 当局部退化中存在 4 点共面时, v_b 为这 4 点的外接圆圆心。

v_b 位置确定后, 检验 v_b 是否引起其他边界边或边界三角形面为非 Delaunay 图形, 如果没有引起边和三角形面为非 Delaunay 图形, 则删除组成局部退化的 2 个四面体的公共面, 连接 v_b 与局部退化的三角形面, 生成新的四面体网格; 否则, 记录 v_b 点引起的非 Delaunay 图形信息, v_b 点不插入网格中。应

用下面的算法消除局部退化:

(1) 对 v_b 引起的非 Delaunay 线段, 插入线段的中点, 以该线段的中点作为四面体的网格顶点重新生成四面体网格。

(2) 对 v_b 引起非 Delaunay 三角形面, 插入该三角形的外接圆圆心 c , 重新生成 Delaunay 四面体, 当 c 引起域内线段的非 Delaunay 性时, 不插入 c , 用上面的第 (1) 步的方法插入中点分裂该线段。

(3) 检验 (1)、(2) 中生成的新的四面体中是否有丢失的线段, 如果有线段丢失, 则应用边界边恢复算法恢复丢失的线段。

局部退化消除的算法比较复杂, 程序实现时需不停地应用空外接球准则来判断线和三角形面的 Delaunay 性质。运用局部消除退化算法时, 新插入的节点不会引起新的局部退化, 局部消除算法能够成功解决局部退化问题。

6 边界面的恢复

边界边恢复以及局部退化消除后, 所有的线段都存在于 Delaunay 四面体中, 但约束面可能出现丢失。边界面的恢复即是为了解决约束面的丢失。边界面的恢复常采用边界面片与四面体相交情况, 由于该方法需判断面与体的多种相交情况, 实现起来比较复杂, 这里采用空腔法来恢复丢失的边界面, 该方法容易实现。

空腔法的算法如下:

(1) 找到共面的所有遗失面片, 相交的面片的删除公共边, 由这些面片组成一个或者多个凸形区域 Ω , Ω 的边界为遗失面片的边。

(2) 找到所有与 Ω 相交的四面体并删除相交四面体, 这时删除的四面体组成一个空腔, 空腔的边界为删除四面体的面组成。 Ω 将空腔分成 2 个空腔 K , 分别在 Ω 的两侧。

(3) 对每一个 K 进行四面体网格的划分。具体实现算法如下: ①对 K 进行扩大化处理。 K 的边界面为非 Delaunay 三角形面时, 删除该面所在的四面体, 将删除的四面体区域加入 K 中, 重复处理 K 的边界, 直到 K 的所有边界面均为 Delaunay 三角形面。②将 K 划分成四面体网格。扩大化处理后的 K 是一个凸多边形, 利用经典的 Delaunay 三角化方法即可将 C 中所有的顶点生成 Delaunay 四面体, 生成后的四面体是最后的约束四面体网格。

经过以上的恢复算法后, 最后得到的网格为约

束 Delaunay 四面体网格。

7 单元质量的控制及网格剖分实例

在任何网格生成的算法中, 都需要控制生成的网格单元的质量优劣。用于有限元计算的三角化网格, 应尽量使三角化单元的边长相等, 即尽量使单元中各边的夹角相等。反映到角度上即为单元中各边的夹角尽量相等, 夹角太小会引起有限元计算精度的减低, 甚至出现不收敛, 因此, 应避免单元中各边的夹角太小的单元存在。这里, 用四面体的外接球半径与单元中最短边的长度之比 (记为 a) 和四面体体积与其外接球体积的比值 (记为 n) 来控制四面体的质量。 a 越小, 表明网格质量好; 而 n 越大, 表明网格质量越好。当单元为正四面体时, 有最小 a 值为 0.612 4 和最大 n 值为 0.122 5。网格生成的过程中, 先检查单元是否满足 a 要求, 如果不满足, 则认为该单元质量不佳, 应重新生成; 如果满足, 再检查 n 是否满足要求, 当 n 不满足时应重新生成; 当 a 和 n 都满足要求时, 则认为网格质量合格。

设如图 4 所示任意四面体 $ijmp$, 各节点坐标分别为 (x_i, y_i, z_i) 、 (x_j, y_j, z_j) 、 (x_m, y_m, z_m) 、 (x_p, y_p, z_p) , 要计算该四面体的 a 和 n 需要求解三元二次方程组, 计算过程复杂。为了方便快速计算出 a 和 n 值, 将该四面体在全局坐标系下作如下变换: 首先将四面体 $ijmp$ 分别沿 X 、 Y 、 Z 轴平移 x_i 、 y_i 、 z_i , 这时 i 点与坐标原点重合, 再将四面体 $ijmp$ 分别绕 X 、 Y 、 Z 轴旋转 $-\alpha$ 、 $-\beta$ 、 $-\gamma$ 角, 每次旋转规定逆时针方向为正, α 大小为平移后线段 ij 与 Z 轴的夹角, β 大小为第 1 次旋转后线段 ij 与 Y 轴的夹角, γ 大小为第 2 次旋转后线段 im 与 X 轴的夹角。第 3 次旋转后, 四面体 $ijmp$ 的位置如图 5 所示, 这时, 三角形 ijm 在平面 XOY 内。

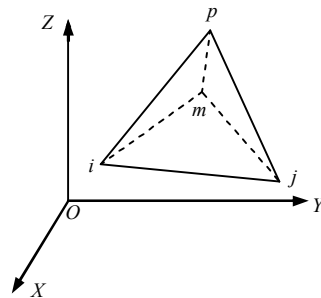


图 4 坐标变换前的四面体位置
Fig.4 Location of tetrahedron before coordinate transformation

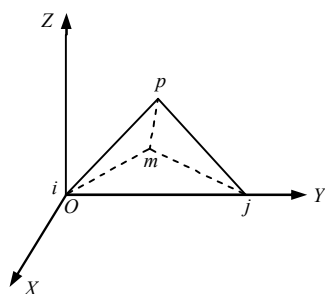


图5 坐标变换后的四面体位置
Fig.5 Location of tetrahedron after coordinate transformation

设坐标变换后, 顶点 i 、 j 、 m 、 p 的坐标分别为 $(0, 0, 0)$ 、 $(x'_j, 0, 0)$ 、 $(x'_m, y'_m, 0)$ 、 (x'_p, y'_p, z'_p) , 各点的坐标可根据变换过程得到。这时, 可得到外接球心的坐标为 $(\frac{x'_j}{2}, \frac{(x'_m)^2 + (y'_m)^2 - x'_j x'_m}{2y'_m}, \frac{(x'_p)^2 + y'_p{}^2 + z'_p{}^2 - x'_j x'_p}{2y'_m} y'_m - \frac{(x'_m{}^2 + y'_m{}^2 - x'_j x'_m) y'_p}{2z'_p y'_m})$, 四面体的体积为 $\frac{1}{6} x'_j y'_m z'_p$ 。

根据以上的计算公式, 可求出正四面体的 $a=0.612\ 4$, $n=0.122\ 5$; 记某单元 $ijmp$, 边 ij 与 im 垂直相等, ip 垂直 ij 和 im , 且其长度是 ij 的 2 倍, 则该单元的 $a=1.224\ 7$, $n=0.043\ 3$ 。输入边界信息时给定 a 和 n , 则网格生成的过程中计算每一个单元的 a 和 n , 使其满足给定的质量控制要求。

当实体几何形状复杂, 特别是出现含有薄层的多种材料时, 可能会出现邻近区域单元体积相差较大, 此时利用推进波前法的优点, 在实体内增加合适的约束点或者线段。在实体上增加合适的约束, 不仅可以提高网格的质量, 并且能够提高时间效率。对于含有节理和裂隙的实体, 可以把节理和裂隙看成是约束加入实体中, 因此, 该方法可用于节理裂隙网络的生成。

基于上述三维约束 Delaunay 算法, 经过大量的计算机编程工作, 将 Si 教授的网格生成 DOS 程序^[7]作了改进移植, 实现了该程序的 Visual C++6.0 平台编译, 可在 Windows 环境下运行, 并通过质量参数对生成的单元质量进行控制, 提高了网格的生成质量。

图 6~10 是通过以上算法生成的三维实体的实例。图 6 实体模型为某一隧道, 生成的网格节点为 8 909 个, 由 44 688 个单元组成, 每个单元的 $a \leq 1.1$, $n \geq 0.04$ 。图 7 中实体模型为一个含有预制裂纹

的岩石试件, 图中所示为剖面图, 加密区域中间位置为裂隙, 裂隙附近网格自动加密, 整个试件生成的网格包含 2 855 个节点, 15 209 个单元, 网格中每个单元的 $a \leq 1.1$, $n \geq 0.04$ 。图 8 的实体模型为含有 3 种土层的肋式隧道, 实体中隧道衬砌与底层的土层厚度比例为 1:120, 在第 2 和底层土层交接处容易出现体积相差较大四面体, 因此, 在边界 AB 以及其厚度对应的另一条边界上插入了 8 个约束点, 单元外接球半径与其最小边长的比为 1.2, 其生成的四面体网格节点为 2 748, 由 11 279 单元组成, 网格中每个单元的 $a \leq 1.4$, $v \geq 0.035$ 。图 9 为含有软弱薄层的 3 种地层的滑坡体, 中间的软弱层和底层厚度比为 1:200, 由于在坡脚处 3 种地层接触, 容易生成体积相差较大的四面体单元, 这时在顶层地层的前后边界面上各加入一条长度从坡脚处到坡度变化处的约束线段, 加入约束后生成的网格含有 52 731 个单元和 30 890 个四面体单元, 每个单元的 $a \leq 1.3$, $n \geq 0.03$ 。图 10 实体模型为岩石的张断裂模式, 生成的网格节点为 1 061 个, 由 3 836 个单元组成, 每个单元的 $a \leq 1.1$, $n \geq 0.04$ 。

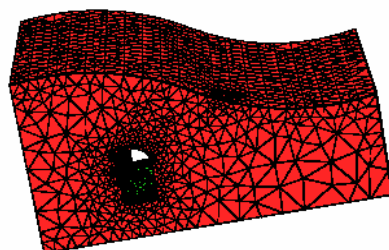


图6 隧道网格
Fig.6 Meshes of 3D tunnel

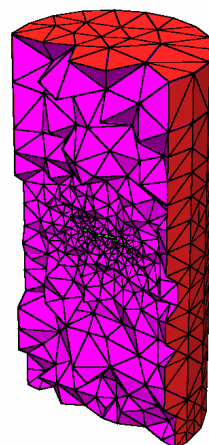


图7 含有预制裂纹的岩石试件
Fig.7 Rock sample containing precast crack

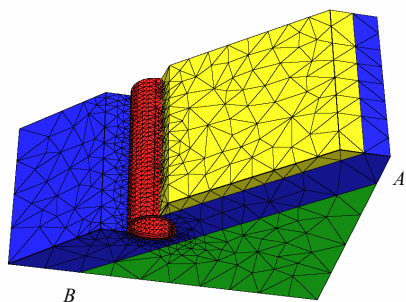


图 8 拱肋式隧道网格

Fig.8 Meshes of 3D arch rib tunnel

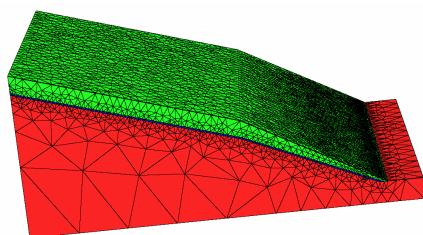


图 9 含有薄层的滑坡体

Fig.9 3D landslide containing a thin soil layer

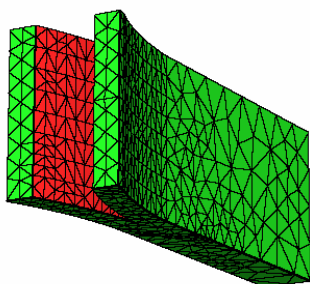


图 10 岩石张裂隙模式

Fig.10 Tensile crack mode of rock

通过以上实例可以看出, 该算法可以通过质量参数 a 和 n 的控制使工程中的复杂实体剖分成高质量的四面体网格, 使其生成的网格达到预期的质量要求。

8 结 语

研究了三维实体约束 Delaunay 三角化剖分算法, 该算法通过边界的恢复成功地解决了约束条件下的 Delaunay 四面体网格的生成, 通过质量参数 a 和 n 的控制, 保证了生成的网格质量, 使生成的网格中每一个单元质量达到预期的质量要求。根据单元节点在全局坐标系下的坐标转换, 简化了质量参数的计算。对于几何形状复杂, 特别是含有薄层的实体, 通过在实体内部增加约束的方法来提高时间效率和网格质量, 使该方法能够实现工程中不同地

质条件下复杂区域四面体网格的自动生成, 并且保证了生成的网格达到预期的质量要求。通过计算实例表明, 该算法能够将复杂三维实体生成质量较好的 Delaunay 四面体网格, 可有效地应用于工程中有有限元网格的生成。

致谢: 本文的程序是在 H. Si 教授的公开的网格生成程序代码上实现的, 在此深表感谢!

参 考 文 献

- [1] 王建华, 徐强勋, 张锐. 任意形状三维物体的 Delaunay 网格生成算法[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 717—722.
WANG Jian-hua, XU Qiang-xun, ZHANG Rui. Delaunay algorithm and related procedure to generate the tetrahedron mesh for object with arbitrary boundary[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, 22(5): 717—722.
- [2] 杨钦, 徐永安, 陈其明, 等. 任意平面域上离散点集的三角化方法[J]. 软件学报, 1998, 9(4): 241—245.
YANG Qin, XU Yong-an, CHEN Qi-ming, et al. Triangulation algorithm of scattered data on arbitrary planar domain[J]. *Journal of Software*, 1998, 9(4): 241—245.
- [3] 崔凌国, 魏生民, 姚忆斌. 三维约束Delaunay三角化的边界恢复方法[J]. 机械设计与制造, 2006, (8): 61—63.
CUI Ling-guo, WEI Sheng-min, YAO Yi-bin. Boundary restore algorithm of 3D constrained Delaunay triangulation[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2006, (8): 61—63.
- [4] 朱冬林, 向彤, 葛修润. 基于约束Delaunay三角划分法在节理图上实现网格自动剖分[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1841—1846.
ZHU Dong-lin, XIANG Tong, GE Xiu-run. Auto-generation grid on joint network model figure based on constraint Delaunay triangulation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(11): 1841—1846.
- [5] LEE D T, LIN A K. Generalized Delaunay triangulations for planar graphs[J]. *Discrete & Computational Geometry*, 1986, 1(1): 201—217.
- [6] WEATHERILL N P, HASSAN O. Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(12): 2005—2039.

- [7] SI H, GARTNER K. Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations[C]//Proceedings of the 14th International Meshing Roundtable. [S. l.]: [s. n.], 2005: 147—163.
- [8] WATSON D F. Computing the n -dimensional Delaunay tessellations with application to Voronoi polytopes[J]. **The Computer Journal**, 1981, 24(2): 167—172.
- [9] 骆冠勇, 曹洪, 房营光. 用逐点插入法生成 Delaunay 四面体自适应网格[J]. 计算力学学报, 2007, 24(6): 917—922.
- LUO Guan-yong, CAO Hong, FANG Ying-guang. An adaptive Delaunay tetrahedron mesh generation method through point by point insertion[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2007, 24(6): 917—922.
- [10] BOWYER A. Computing Dirichlet tessellations[J]. **The Computer Journal**, 1981, 24(2): 162—166.
- [11] 周晓云, 刘慎权. 实现约束 Delaunay 三角剖分的健壮算法[J]. 计算机学, 1996, 19(8): 615—624.
- ZHOU Xiao-yun, LIU Shen-quan. A robust algorithm for constrained Delaunay triangulation[J]. **The Chinese Journal of Computers**, 1996, 19(8): 615—624.
- [12] GUAN ZHENQUN, SONG CAO, GU YUANXIAN. The boundary recovery and sliver elimination algorithms of three-dimensional constrained Delaunay triangulation[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2006, 68(2): 192—209.
- [13] 杨钦, 徐永安, 陈其明, 等. 三维约束 Delaunay 三角化研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(8): 590—594.
- YANG Qin, XU Yong-an, CHEN Qi-ming, et al. Research on 3D Delaunay triangulation[J]. **Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics**, 2000, 12(8): 590—594.
- [14] SHEWCHUK J R A. Condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained Delaunay triangulations[C]//Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry. New York: [s. n.], 1998: 76—85.
- [15] SHEWCHUK J R. Constrained Delaunay Tetrahedralizations and provably good boundary recovery[C]//11th International Meshing Roundtable. New York: Springer-Verlag, 2002: 193—204.
- [16] EDELSBRUNNER H, MUCKE M P. A technique to cope with degenerate cases in geometric algorithm[J]. **ACM Transactions on Graphics**, 1990, 9(1): 66—104.
- [17] SHEWCHUK J R. Updating and constructing constrained Delaunay and constrained regular triangulations by flips[C]//The 19th Annual Symposium Computer Geometry. New York:[s. n.], 2003: 181—190.
- [18] SI H. Adaptive tetrahedral mesh generation by constrained Delaunay refinement[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2008, 75(7): 856—888.
- [19] CHEW L P. Guaranteed-quality Delaunay meshing in 3D[C]//Proceedings of the 13th Annual Symposium on Computer Geometry. New York:[s. n.], 1997: 391—393.

上接第 3478 页

- [6] 朱岳明, 龚道勇, 章洪, 等. 碾压混凝土坝渗流场分析的缝面渗流平面单元模拟法[J]. 水利学报, 2003, (3): 63—68.
- ZHU Yue-ming, GONG Dao-yong, ZHANG Hong, et al. Plan element simulation of fracture seepage for analyzing seepage in RCC dams[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2003, (3): 63—68.
- [7] 速宝玉, 朱岳明. 不变网格确定渗流自由面的节点虚流量法[J]. 河海大学学报, 1991, 19(5): 113—117.
- SU Bao-yu, ZHU Yue-ming. Procedure of virtual flux for seepage free surface with fixed mesh[J]. **Journal of Hohai University**, 1991, 19(5): 113—117.
- [8] 舒仲英, 邓建霞, 李龙国. 加密高斯点单元传导矩阵调整法在有自由面渗流分析中的应用[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2007, 39(1): 48—52.
- SHU Zhong-ying, DENG Jian-xia, LI Long-guo. Application of element conduct matrix regulative method by encrypting Gauss point in seepage analysis with free surface[J]. **Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)**, 2007, 39(1): 48—52.
- [9] 张乾飞, 吴中如. 有自由面非稳定渗流分析的改进截止负压法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1): 48—54.
- ZHANG Qian-fei, WU Zhong-ru. The improved cut-off negative pressure method for unsteady seepage flow with free surface[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(1): 48—54.
- [10] 钱春香, 王育江, 黄蓓. 水在混凝土裂缝中的渗流规律[J]. 硅酸盐学报, 2009, 37(12): 2078—2082.
- QIAN Chun-xiang, WANG Yu-jiang, HUANG Bei. Water seepage in concrete cracks[J]. **Journal of the Chinese Ceramic Society**, 2009, 37(12): 2078—2082.
- [11] 朱岳明. Darcy 渗流量计算的等效节点虚流量法[J]. 河海大学学报, 1997, 25(4): 105—108.
- ZHU Yue-ming. The equivalent nodal flux method for the calculation of Darcy flow[J]. **Journal of Hohai University**, 1997, 25(4): 105—108.